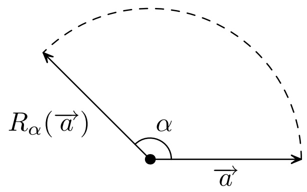
Trigonometriaa

Tutkitaan kuvausta $\mathrm{R}_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

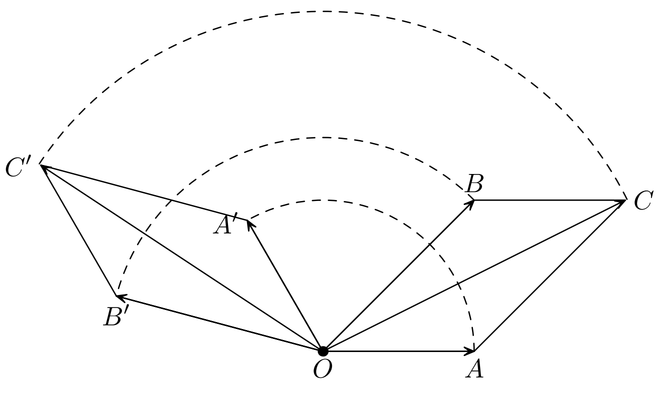
$$\bar{a} \longmapsto \mathrm{R}_\alpha(\bar{a}),$$

joka kiertää vektoria $\bar{a} \neq \bar{0}$ suunnatun kulman α verran kuvion 1. osoittamalla tavalla. Sovitaan erikseen, että $\mathrm{R}_\alpha(\bar{0}) = \bar{0}$.



Kuvio 1.

Kuviosta 2. luettavissa, että vektorien summa kiertyy termeittäin,

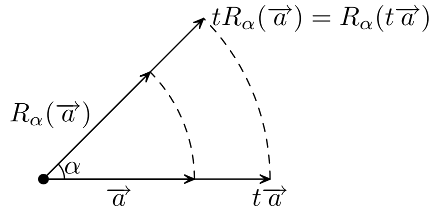


Kuvio 2.

eli

$$\mathrm{R}_\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \mathrm{R}_\alpha(\bar{a}) + \mathrm{R}_\alpha(\bar{b}).$$

Kuviosta 3. ilmenee, että kierron ja venytyksen järjestys voidaan vaihtaa, eli jos $t \in \mathbb{R}$, niin $\mathrm{R}_\alpha(t\bar{a}) = t\mathrm{R}_\alpha(\bar{a})$.



Kuvio 3.

Kuvioittakin on selvää, että kahden peräkkäin suoritetun kierron järjestys voidaan vaihtaa ja kierrot yhdistyvät yhdeksi ainoaksi kierroksi, jonka kulma on osakiertojen kulmien summa, siis

$$\mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_\beta(\bar{a})\big) = \mathrm{R}_\beta\big(\mathrm{R}_\alpha(\bar{a})\big) = \mathrm{R}_{\alpha+\beta}(\bar{a}).$$

Lisäksi ymmärretään, että

$$\mathrm{R}_{\pi/2}(\bar{\imath}) = \bar{\jmath}, \quad \mathrm{R}_{\pi/2}(\bar{\jmath}) = -\bar{\imath} \quad \text{ja} \quad \mathrm{R}_\alpha(\bar{\imath}) = \cos\alpha\bar{\imath} + \sin\alpha\bar{\jmath}.$$

Todettujen laskusääntöjen avulla saadaan vielä

$$\mathrm{R}_\alpha(\bar{\jmath}) = \mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_{\pi/2}(\bar{\imath})\big) = \mathrm{R}_{\pi/2}\big(\mathrm{R}_\alpha(\bar{\imath})\big) = \mathrm{R}_{\pi/2}\big(\cos\alpha\bar{\imath} + \sin\alpha\bar{\jmath}\big) =$$

$$= \cos\alpha\mathrm{R}_{\pi/2}(\bar{\imath}) + \sin\alpha\mathrm{R}_{\pi/2}(\bar{\jmath}) = \cos\alpha\bar{\jmath} - \sin\alpha\bar{\imath}.$$

Siis kantavektorien kierrot ovat

$$\begin{cases} \mathrm{R}_\alpha(\bar{\imath}) & = & \cos\alpha\bar{\imath} + \sin\alpha\bar{\jmath} \\ \mathrm{R}_\alpha(\bar{\jmath}) & = & \cos\alpha\bar{\jmath} - \sin\alpha\bar{\imath}. \end{cases}$$

Kirjoittamalla johdettujen laskusääntöjen avulla yhtälö

$$\mathrm{R}_{\alpha+\beta}(\bar{\imath}) = \mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_\beta(\bar{\imath})\big)$$

eksplisiittisempään muotoon saadaan välittömästi trigonometrian tärkeimmät kaavat

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) & = & \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) & = & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \end{cases}$$

Näitä kutsutaan sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoiksi ja ne ovat siinä mielessä trigonometrian tärkeimmät kaavat, että niiden avulla voidaan todistaa melkein kaikki muu koulutrigonometriassa esiin tuleva. Sinin ja kosinin perusmääritelmien lisäksi täytyy tuntea ainoastaan näiden funktioiden parittomuus/parillisuus ominaisuudet. Niitä soveltaen saadaan yhteenlaskukaavoista vähennyslaskukaavat

$$\begin{cases} \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \end{cases}$$

ja esimerkiksi kosinin vähennyslaskukaavasta seuraa

$$1 = \cos 0 = \cos(\alpha-\alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha.$$

Pari harjoitusta

1. Piirrä yhtälöä $\mathrm{R}_\alpha(t\bar{a}) = t\mathrm{R}_\alpha(\bar{a})$ havainnollistava kuvio siinä tapauksessa, että $t < 0$.

2. Johda yhteenlaskukaavat yhtälöstä

$$\mathrm{R}_{\alpha+\beta}(\bar{\imath}) = \mathrm{R}_\alpha\big(\mathrm{R}_\beta(\bar{\imath})\big)$$

sekä vähennyslaskukaavat yhteenlaskukaavoista.

3. Todista taulukkokirjassa olevat trigonometristen funktioiden ominaisuuksia koskevat kaavat.

(090107 Ʊ)