Lukujonon raja-arvo

Lukujonon raja-arvo on matemaattisen analyysin tärkeimpiä käsitteitä, sillä sen avulla voidaan määritellä suurin osa analyysin muista käsitteistä. Raja-arvon määritelmän avulla on myös helpointa oppia analyysin keskeisimmän työvälineen, ε-tekniikan, käyttö. Raja-arvon tarkka määritelmä ja siihen liittyvä ε-tekniikka eivät ole koskaan kuuluneet lukion oppimäärään, mutta kokemus on osoittanut, että matematiikasta todella kiinnostuneella lukiolaisella ei ole mitään ikään liittyvää kehityspsykologista estettä niiden omaksumiseen. Tämä kirjoitelma pyrkii täydentämään lukioissa käytettyjä oppimateriaaleja mainituilta osin ja näin johdattamaan asiasta kiinnostuneen lukijan matemaattisen analyysin perusteiden syvempään ymmärtämiseen.

Määrittelemme raja-arvon aluksi havainnollisesti ja tarkennamme määritelmää asteittain, kunnes saamme sen matemaattisesti moitteettomaksi. Havainnollistamme ε-tekniikkaa muutamalla esimerkillä ja lopuksi annamme sarjan harjoitustehtäviä, joiden huolellinen suorittaminen varmistaa asian ymmärtämisen.

> *Lukujono (a_n) suppenee kohti raja-arvoa a, jos jonon termit a_n lähestyvät rajattomasti lukua a eli tulevat mielivaltaisen lähelle lukua a, kun n kasvaa rajattomasti.*

Mitä tarkoitetaan rajattomalla lähestymisellä eli mielivaltaisen lähelle tulemisella ja luvun n rajattomalla kasvamisella? Merkitsemme niitä nuolilla $a_n \to a$ ja $n \to \infty$, mutta merkintätapa ei ole vastaus kysymykseen. Koska lukujen a ja a_n välinen etäisyys on niiden erotuksen itseisarvo $|a - a_n|$, voimme joka tapauksessa sanoa, että

$$a_n \to a \text{ jos ja vain jos } |a - a_n| \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Sekä rajaton lähestyminen että kasvaminen ovat kuvailevia käsitteitä, jotka eivät sellaisenaan kelpaa matemaattiseen määritelmään. Ne on voitava määritellä yksinomaan reaalilukujen ominaisuuksia käyttäen. Tarkastelemme aluksi n:n kasvamista. Kuinka suureksi sen pitää tulla, jotta raja-arvo saavutettaisiin? Välttämättä mikään äärellinen arvo ei riitä, sillä esimerkiksi jonon (a_n), $a_n = 1/n$, termit lähestyvät nollaa n:n kasvaessa, mutta raja-arvoa 0 ei saavuteta millään n:n arvolla. Luku n on siis valittava *suuremmaksi kuin mikä tahansa ennalta asetettu äärellinen rajakohta* $N \in \mathbb{Z}_+$. Tätä merkitsemme lyhyesti $n \to \infty$ ja sanomme n:n lähestyvän ääretöntä.

Etäisyys $\left|a - a_n\right|$ on n:stä riippuva ei-negatiivinen reaaliluku. Jos se *voidaan n:ää kasvattamalla tehdä pienemmäksi kuin mikä tahansa ennalta valittu positiivinen reaaliluku*, niin sanomme sen tulevan mielivaltaisen lähelle nollaa. Näin myös rajaton nollaa lähestyminen tulee määritellyksi reaalilukujen ominaisuuksien avulla ja voimme nyt muotoilla raja-arvon tarkan määritelmän. Teemme sen aluksi *Ernst Lindelöfin* (1870 − 1946) mainion teoksen "*Johdatus korkeampaan analyysiin* ", [2], tekstiä myötäillen.

> *Lukujonolla (a_n) sanotaan olevan luku a raja-arvona, eli lukujonon sanotaan suppenevan kohti raja-arvoa a, jos jokaista positiivilukua ε kohden, valittakoon tämä miten pieni hyvänsä, aina voidaan määrätä sellainen kokonaisluku N_ε, että*
>
> $$\left|a - a_n\right| < \varepsilon \quad \textit{niin pian kuin} \quad n > N_\varepsilon.$$

Edelleen Lindelöfiä lainaten: *Nämä epäyhtälöt sisältävät sen, että kaikki jonon (a_n) luvut, joille $n > N_\varepsilon$, joutuvat välille $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$. Jos valitaan pienempi ε, niin lukua N_ε täytyy yleensä suurentaa, jotta tämä ehto olisi täytetty.*

Lindelöfin "Johdatuksen", samoin kuin hänen muitakin teoksiaan, saattaa löytää suurimpien kaupunkien kirjastoista ja hyvällä onnella myös antikvariaateista. Se on yksi merkittävimmistä Suomessa ilmestyneistä matematiikan oppikirjoista, sillä sen avulla suomalaisen matematiikan maailmanmaineeseen kohottaneet funktioteoreetikot opiskelivat analyysin alkeet 1900-luvun alkupuolella. *Rolf Nevanlinna* (1895 − 1980) on sanonut teoksen vaikuttaneen ratkaisevasti hänen uravalintaansa. Hän oli harkinnut klassisten kielten opiskelua, mutta ylioppilaskesänä luettu "Johdatus" herätti hänessä peruuttamattoman kiinnostuksen matematiikkaan. Myös akateemikko *Olli Lehto* ([1]) on kertonut lukeneensa teoksen ylioppilaskesänään samoin seurauksin.

Vanhahtavasta kieliasustaan huolimatta Lindelöfin antama määritelmä on vieläkin pedagogisesti ylittämätön, sillä se on matemaattisesti tarkka ja samalla siinä selitetään asia ytimekkäästi. Samaan tarkkuuteen ja selittävyyteen pyritään teoksessa [3], jossa annettu raja-arvon määritelmä on oikeastaan vain Lindelöfin määritelmän käännös nykysuomeksi.

Lukujono (a_n) suppenee kohti raja-arvoa a, jos jokaista positiivista lukua ε vastaa sellainen positiivinen kokonaisluku n_ε, että

$$\left|a - a_n\right| < \varepsilon \quad \text{aina, kun} \quad n \geq n_\varepsilon.$$

Kun $\varepsilon > 0$ on kiinnitetty, olipa se kuinka pieni tahansa, täytyy siis löytyä tällainen (tavallisesti ε:sta riippuva) luku n_ε.

Luentomaisessa esityksessä, jossa selitykset voidaan tehdä suullisesti, määritelmä on tapana tiivistää logiikan käsitteitä hyödyntäen. Näin saadaan itse asiassa kielimuurit ylittävä raja-arvon määritelmä.

Lukujonon (a_n) raja-arvo on a, jos

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\colon\ \exists n_\varepsilon \in \mathrm{Z}_+\colon\ n > n_\varepsilon \Rightarrow \left|a - a_n\right| < \varepsilon.$$

Määritelmän avulla emme voi laskea annetun jonon raja-arvoa. Sen avulla voimme ainoastaan todistaa, että annettu luku joko on tai ei ole annetun jonon raja-arvo. Esimerkit selventävät asiaa.

Esim. 1 Todistamme, että $\lim a_n = 2$, kun $a_n = (2n+1)/(n-1)$.

Olkoon ε mielivaltaisesti valittu positiivinen luku. Tällöin

$$\left|2 - a_n\right| = \left|2 - \frac{2n+1}{n-1}\right| = \frac{3}{n-1} < \varepsilon,$$

jos $n > 1 + 3/\varepsilon$. Jos siis kokonaisluku n_ε on vähintään yhtäsuuri kuin reaaliluku $1 + 3/\varepsilon$ ja n suurempi kuin n_ε, niin $\left|2 - a_n\right| < \varepsilon$ olipa positiivinen ε kuinka pieni tahansa. Siis $a_n \to 2$, kun $n \to \infty$.

Esim. 2 Osoitamme, että $\lim a_n \neq 2$, kun $a_n = (3n-1)/(n-1)$.

Tutkimalla erotusta $\left|2 - a_n\right|$ näemme, että

$$\left|2 - a_n\right| = \left|2 - \frac{3n-1}{n-1}\right| = \frac{n+1}{n-1} > 1,$$

kun $n \geq 2$, joten epäyhtälö $\left|2 - a_n\right| < \varepsilon$ ei voi toteutua jos esimerkiksi $0 < \varepsilon < 1$. Täten $\lim a_n \neq 2$.

Se, että (esimerkissä 1) reaalilukua $1+3/\varepsilon$ suurempia kokonaislukuja on olemassa, seuraa reaalilukujen perusominaisuuksista, joihin emme puutu tässä yhteydessä. Kiinnostunut lukija voi perehtyä reaalilukujen aksiomaattiseen esitykseen, samoin kuin jatkuvan funktion ominaisuuksien todistamiseen, teoksen [3] avulla. Siinä selvitetään myös ε-todistusten laatiminen erittäin yksityiskohtaisesti.

Määritelmän avulla voimme todistaa myös jonoja koskevia yleisiä lauseita.

Esim. 3 Jos (a_n) ja (b_n) ovat suppenevia jonoja, niin myös niiden termien summista muodostuva jono $(a_n + b_n)$ on suppeneva ja

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

Todistus. Olkoot $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ ja ε mielivaltaisesti valittu positiivinen reaaliluku. Raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa kokonaisluvut n_1 ja n_2 siten, että $|a - a_n| < \varepsilon/2$, jos $n > n_1$, ja $|b - b_n| < \varepsilon/2$, jos $n > n_2$. Jos nyt $n > \max(n_1, n_2)$, niin kolmioepäyhtälöä soveltaen saamme

$$\big|(a+b)-(a_n+b_n)\big| = \big|(a-a_n)+(b-b_n)\big| \le \big|a-a_n\big|+\big|b-b_n\big| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon,$$

mistä väitös seuraa.

Voisimme valita luvut n_1 ja n_2 myös siten, että $|a - a_n| < \varepsilon$, jos $n > n_1$, ja $|b - b_n| < \varepsilon$, jos $n > n_2$. Tällöin, jos $n > \max(n_1, n_2)$, niin saamme kolmioepäyhtälön avulla

$$\big|(a+b)-(a_n+b_n)\big| = \big|(a-a_n)+(b-b_n)\big| \le \big|a-a_n\big|+\big|b-b_n\big| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon,$$

mistä väitös myös seuraa, sillä 2ε on yhtälailla mielivaltainen positiivinen reaaliluku kuin ε.

Harjoitustehtäviä

1. Osoita, että esimerkissä n:o 2 annetun jonon raja-arvo on 3.

2. Olkoon c reaalinen vakio ja (a_n) suppeneva jono. Osoita, että

$$\lim (c\, a_n) = c\, \lim a_n.$$

3. Jono (a_n) on *rajoitettu*, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}_+$ siten, että kaikilla n:n arvoilla on $|a_n| \leq M$. Osoita, että suppenevat jonot ovat rajoitettuja.

4. Osoita: Jos $\lim a_n = a$ ja $\lim b_n = b$, niin $\lim (a_n b_n) = ab$.

5. Osoita: Jos $\lim a_n = a$ ja $\lim a_n = b$, niin $a = b$.

6. Osoita: Jonon (a_n) raja-arvo on a jos ja vain jos jokaisen välin

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\quad (\varepsilon \in \mathbb{R}_+)$$

ulkopuolella on korkeintaan äärellinen määrä jonon termejä.

7. Muotoile pelkästään reaalilukujen ominaisuuksiin tukeutuva määritelmä sille, että $\lim a_n = \infty$.

Kirjallisuutta

1. Olli Lehto: Korkeat maailmat
Rolf Nevanlinnan elämä, Otava 2001.

2. Ernst Lindelöf: Johdatus korkeampaan analyysiin,
5. painoksen muuttamaton lisäpainos, WSOY 1967.

3. Jorma Merikoski, Markku Halmetoja, Timo Tossavainen:
Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan, WSOY 2004.

251105 ℧