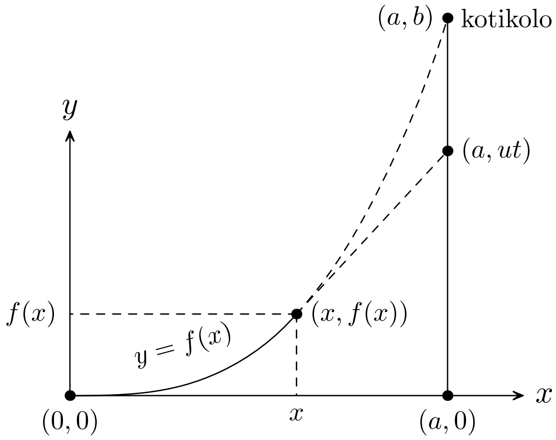
Raaka tehtävä!

Petolintu lentää 50 metrin korkeudella ja havaitsee suoraan alapuolellaan pupujussin. Lintu lähtee syöksymään vakiovauhdilla v kohti pupua, joka samalla hetkellä lähtee loikkimaan nopeudella 10 m/s kohti sadan metrin päässä olevaa kotikoloaan. Lintu suuntaa syöksynsä joka hetki pupua kohti. Mikä on pienin v, jolla lintu tavoittaa pupujussin?

$$\text{Vast}: v = \frac{5+5\sqrt{17}}{2}\ \text{m/s}\ \approx 13\ \text{m/s}.$$

Ohje: Sijoita lintu alkuhetkellä origoon, pupu pisteeseen $(50, 0)$ ja pupun tyhjäksi jäävä kotikolo pisteeseen $(50, 100)$.

Ratkaisu. Merkitsemällä $10\,\mathrm{m/s} = u$, $50\,\mathrm{m} = a$ ja $100\,\mathrm{m} = b$ saadaan kauniimpia yhtälöitä. Alkakoon linnun syöksy hetkellä $t = 0$ ja olkoon $y = f(x)$ linnun ratakäyrän yhtälö. Lintu lähtee origosta ja syöksy alkaa kohtisuoraan alas, joten $f(0) = 0$ ja $f'(0) = 0$. Linnun syöksymisnopeus $v(> u)$ on pienin mahdollinen silloin, kun se tavoittaa pupun sen kotikolon edustalla. Siis $f(a) = b$.



Jos lintu on hetkellä t pisteessä $(x, f(x))$, niin se on aikavälillä $[0, t]$ kulkenut matkan vt ja toisaalta matka on käyrän $y = f(x)$ välillä $[0, x]$ olevan osan pituus. Siis

$$vt = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(\xi)]^2}\, d\xi. \tag{1}$$

Hetkellä t pupu on pisteessä (a, ut). Koska linnun syöksy suuntautuu jatkuvasti pupua kohti, saamme sen lentoradan kohdassa x olevan tangentin kulmakertoimen eli funktion f derivaatan esitettyä pupun sijainnin avulla,

$$f'(x) = \frac{f(x) - ut}{x - a},$$

mistä seuraa

$$ut = f(x) + f'(x)(a - x). \tag{2}$$

Eliminoimalla t:n yhtälöistä (1) ja (2) saamme yhtälön, josta ratkeaa ratakäyrä $y = f(x)$, ja sen avulla v. Aluksi pahalta näyttävä yhtälö

$$\frac{u}{v}\int_0^x \sqrt{1+[f'(\xi)]^2}\,d\xi = f(x) + f'(x)(a-x), \tag{3}$$

siistiytyy derivoimalla muotoon

$$\frac{u}{v}\sqrt{1+[f'(x)]^2} = f''(x)(a-x). \tag{4}$$

Merkitsemällä $p = f'(x)$, jolloin $f''(x) = \frac{dp}{dx}$, saamme (4):stä

$$\frac{u}{v}\sqrt{1+p^2} = \frac{dp}{dx}(a-x),$$

mistä muuttujat erottamalla tulee

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{u}{v}\,\frac{dx}{a-x},$$

ja edelleen integroimalla

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = -\frac{u}{v}\ln(a-x) + A.$$

Koska $p(0) = f'(0) = 0$, saamme $A = \frac{u}{v}\ln a$, ja yhtälö sievenee muotoon

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = \frac{u}{v}\,\ln\left(\frac{a}{a-x}\right) = \ln\left(\frac{a}{a-x}\right)^{u/v}. \tag{5}$$

Huomaamalla, että yhtälön (5) vasen puoli on hyperbolisen sinin käänteisfunktio, saamme

$$p = f'(x) = \sinh\left(\ln\left(\frac{a}{a-x}\right)^{u/v}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a-x}\right)^{u/v} - \frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{a}\right)^{u/v}.$$

Kirjoittamalla $f'(x)$ muotoon

$$f'(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)^{-u/v} - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)^{u/v},$$

saadaan integroimalla

$$f(x) = \frac{av}{2(v+u)}\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)^{1+u/v} - \frac{av}{2(v-u)}\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)^{1-u/v} + C.$$

Ehdosta $f(0) = 0$ seuraa, että

$$C = \frac{a}{2}\Big(\frac{v}{v-u} - \frac{v}{v+u}\Big) = \frac{auv}{v^2 - u^2},$$

joten ratakäyrän yhtälö on

$$f(x) = \frac{av}{2(v+u)}\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)^{1+u/v} - \frac{av}{2(v-u)}\Big(1 - \frac{x}{a}\Big)^{1-u/v} + \frac{auv}{v^2 - u^2}.$$

Ehdosta $f(a) = b$ saamme v:n ratkaisemiseksi yhtälön

$$f(a) = \frac{auv}{v^2 - u^2} = b,$$

mikä annettujen numeeristen arvojen sijoittamisen jälkeen pelkistyy muotoon

$$v^2 - 5v - 100 = 0.$$

Etusivulla annettu vastaus saadaan tästä.

060906 ℧