Outoja funktioita

Differentiaalilaskentaa harjoitettiin miltei 200 vuotta ennen kuin sen perustana olevat reaaliluvut sekä funktio ja sen raja-arvo määriteltiin täsmällisesti turvautumatta geometriseen havaintoon ja ”rajattoman lähestymisen” kaltaisiin kuvaileviin ilmaisuihin. Tämä tapahtui 1800-luvulla, ja samalla selkiytyivät funktion jatkuvuuteen ja derivoituvuuteen liittyneet ongelmat. Sitä ennen oli jopa yritetty todistaa, että funktion jatkuvuudesta seuraisi derivoituvuus joitakin yksittäisiä kohtia lukuunottamatta. Käsitteiden selkiytymisen myötä keksittiin kuitenkin funktioita, jotka ovat kaikkialla jatkuvia, mutta joilla ei ole derivaattaa yhdessäkään kohdassa. Tällaisten ja muidenkin vastaavien funktioiden olemuksen ymmärtäminen edellyttää siis analyysin peruskäsitteiden tarkkaa tuntemista. Teemme tarvittavat määrittelyt puuttumatta kuitenkaan itse reaalilukuihin. Riittää, että voimme samastaa ne suoran pisteisiin, jolloin on luontevaa puhua niiden välisistä etäisyyksistä.

Määrittelyjä

Olkoon funktio f määritelty kohdan x_0 eräässä ympäristössä tätä kohtaa mahdollisesti lukuunottamatta. Se, että luku $f(x)$ lähestyy lukua a, kun x lähestyy lukua x_0, tarkoittaa sitä, että jos ε on mikä tahansa positiivinen reaaliluku, niin lukujen $f(x)$ ja a välinen etäisyys on mahdollista tehdä pienemmäksi kuin tuo ε valitsemalla x riittävän läheltä x_0:aa. Siis funktiolla f on kohdassa x_0 raja-arvo a, jos jokaista positiivista lukua ε vastaa sellainen positiivinen δ_ε, että

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Funktio on jatkuva kohdassa x_0 jos funktion raja-arvo kohdassa x_0 on sama kuin funktion arvo tässä kohdassa. Siis funktio f on jatkuva kohdassa x_0, jos jokaista positiivista lukua ε vastaa sellainen positiivinen δ_ε, että

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Jos funktio ei ole jatkuva kohdassa x_0, niin se on epäjatkuva tässä kohdassa.

Lukujonolla (a_n) on raja-arvo a, jos lukujen a ja a_n välinen etäisyys voidaan tehdä pienemmäksi kuin mikä tahansa positiivinen luku valitsemalla n riittävän suureksi, siis jos jokaista positiivista lukua ε vastaa positiivinen kokonaisluku n_ε siten, että $n > n_\varepsilon \;\Rightarrow\; |\,a - a_n| < \varepsilon$. Jos jonolla on raja-arvo, niin jono suppenee. Muussa tapauksessa jono hajaantuu.

Jos jono on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, tai vastaavasti vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin jono on suppeneva. Tämä *monotonisen jonon suppenemislause* on reaalilukujen täydellisyysaksiooman eräs muoto, joten sitä ei tarvitse todistaa, ks. [1]. Pidämme myös selvänä, että jos x on mikä tahansa reaaliluku, niin on olemassa pelkistä rationaaliluvuista sekä pelkistä irrationaaliluvuista koostuva jono, jonka raja-arvo on x.

Funktion raja-arvo voidaan määritellä myös suppenevien jonojen avulla. Funktiolla f on kohdassa x_0 raja-arvo a, jos jokaiselle kohti x_0:aa suppenevalle jonolle (x_n), jonka termeille $f(x_n)$ on olemassa, jonon $(f(x_n))$ raja-arvo on a. Jos erityisesti löytyy yksikin kohti lukua x_0 suppeneva jono, jota vastaava funktion arvoista muodostuva jono hajaantuu, niin funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa x_0. Jos taas löytyy kaksi eri jonoa, jotka suppenevat kohti lukua x_0, mutta joita vastaavilla funktion arvoista muodostuvilla jonoilla on eri raja-arvot, niin silloinkaan funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa x_0. Jätämme lukijan todistettavaksi, että tässä annettu raja-arvon määritelmä on yhtäpitävä alkuperäisen (ε, δ)-määritelmän kanssa.

Outoja funktioita

Esittelemme aluksi harjoitustehtävinä kolme jatkuvuuden käsitettä havainnollistavaa funktiota.

1. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

on jaksollinen ja epäjatkuva kaikkialla. Määritä funktion jaksot. Saksalainen matemaatikko Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) laati tämän esimerkin ilmeisesti osoittaakseen, että on olemassa muitakin kuin lausekkeiden avulla määriteltyjä funktioita.

2. Osoita, että funktio

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

on jatkuva ja derivoituva ainoastaan yhdessä kohdassa.

3. Funktio f on määritelty siten, että $f(x) = 0$, kun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ja jos $x = p/q$, missä $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_+$ ja $\mathrm{syt}(p, q) = 1$, niin $f(x) = 1/q$. Osoita, että tämä funktio on jatkuva jokaisessa irrationaalisessa kohdassa ja epäjatkuva muulloin. Onko f derivoituva irrationaalisissa kohdissa?

Kuten alussa totesimme, on olemassa funktioita, jotka ovat kaikkialla jatkuvia mutta eivät missään derivoituvia. Ensimmäiset esimerkit sellaisista keksittiin 1800-luvulla, mutta ne ovat hyvin vaikeita. Ehkä yksinkertaisimman mahdollisen esimerkin julkaisi hollantilainen matemaatikko Bartel Leendert van der Waerden (1903 – 1996) vuonna 1930, ks. [2]. Tutkimme sitä pienen esivalmistelun jälkeen.

Olkoon $\{x\}$ luvun x etäisyys lähimmästä kokonaisluvusta. Funktio $x \mapsto \{x\}$ on jatkuva ja jaksollinen. Sen perusjakso on 1 ja $0 \leq \{x\} \leq \frac{1}{2}$ kaikilla x:n arvoilla.

Esimerkkifunktiomme on

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{10^k x\}}{10^k}.$$

Näytämme aluksi, että se on määritelty kaikilla x:n arvoilla. Osasummien

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\{10^k x\}}{10^k}$$

jono (f_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, sillä yhteenlaskettavat ovat ei-negatiivisia, ja

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\{10^k x\}}{10^k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{10^k} < \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{5}{9}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Monotonisen jonon suppenemislauseen perusteella jono (f_n) suppenee kaikilla x:n arvoilla, joten f on kaikkialla määritelty. Osasummat ovat myös jatkuvia, sillä ne ovat jatkuvien funktioiden äärellisiä summia.

Tutkimme tarkemmin jonon (f_n) suppenemista. Erotus

$$|f(x) - f_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\{10^k x\}}{10^k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{18} \cdot 10^{-n} < 10^{-n},$$

ja 10^{-n} voidaan tehdä pienemmäksi kuin mikä tahansa ennalta valittu positiivinen luku valitsemalla n riittävän suureksi. Jos siis $\varepsilon > 0$ on mielivaltaisesti valittu, niin on olemassa luvusta x riippumaton kokonaisluku n_ε siten, että jos $n > n_\varepsilon$, niin $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Koska suppeneminen ei riipu x:stä, sanomme, että jono (f_n) *suppenee tasaisesti.* Todistamme, että sen raja-arvona oleva funktio f on jatkuva.

Olkoon siis $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mielivaltaisesti valittuja. Jonon (f_n) tasaisen suppenemisen takia on mahdollista valita niin suuri $n \in \mathbb{Z}_+$, että

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{ja} \quad |f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Koska f_n on jatkuva, on olemassa $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ niin, että

$$0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Siis valittua ε:ia kohti on olemassa δ_ε siten, että jos $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$, niin

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Täten funktio f on kaikkialla jatkuva.

Osoitamme, että f ei ole derivoituva. Voimme rajoittua välille $[0, 1[$, sillä f on jaksollinen ja sen perusjakso on 1. Olkoon siis $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$ väliltä $[0, 1[$ mielivaltaisesti valittu luku. Sovimme, että jos sen desimaalikehitelmä on tyyppiä $0{,}2999\ldots$, niin muutamme sen muotoon $0{,}3000\ldots$. Jos $0{,}a_{k+1}a_{k+2}\ldots \leq \frac{1}{2}$, niin $\{10^k x\} = 0{,}a_{k+1}a_{k+2}\ldots$ ja muussa tapauksessa $\{10^k x\} = 1 - 0{,}a_{k+1}a_{k+2}\ldots$. Muodostamme kohti nollaa suppenevan jonon (h_m) siten, että erotusosamääristä

$$d_m = \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m}$$

muodostuva jono (d_m) hajaantuu. Olkoon $h_m = -10^{-m}$, jos $a_m = 4$ tai $a_m = 9$, ja $h_m = 10^{-m}$ muulloin. Jos $k \geq m$, niin lukujen $10^k(x+h_m)$ ja $10^k x$ desimaaliosat ovat samat, jolloin $\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\} = 0$. Tästä seuraa, että

$$d_m = \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k\, h_m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k\, h_m}.$$

Lukujen h_m valintatavasta johtuen tässä summassa yhteenlaskettavien osoittajissa olevat luvut $\{10^k(x+h_m)\}$ ja $\{10^k x\}$ ovat molemmat joko tyyppiä $0{,}a_{k+1}a_{k+2}\ldots$, jolloin

$$\frac{\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k\, h_m} = \frac{\pm 10^{k-m}}{\pm 10^{k-m}} = 1,$$

tai tyyppiä $1 - 0{,}a_{k+1}a_{k+2}\ldots$, jolloin

$$\frac{\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k\, h_m} = \frac{\mp 10^{k-m}}{\pm 10^{k-m}} = -1.$$

Siis summassa

$$d_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\{10^k(x+h_m)\} - \{10^k x\}}{10^k\, h_m}$$

jokainen yhteenlaskettava on joko 1 tai -1. Niinpä kaikilla m:n arvoilla

$$d_{m+1} = d_m + 1 \quad \text{tai} \quad d_{m+1} = d_m - 1,$$

joten jono (d_m) hajaantuu.

Lähteet

[1] Merikoski, Halmetoja, Tossavainen: Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan, WSOY 2004,

[2] Riesz, Sz.-Nagy: Functional Analysis, New York, 1990.