

## ”Opetaja opetaa ja ketuilee!”

Perehdymme jakolaskun syvimpään olemukseen seuraavan esimerkin avulla.

**Esim 1.** Kolme metsäveljeä (tapahtuu Virossa ennen maan itsenäistymistä) varastaa sovhoosin kanalasta 12 kananmunaa. Vaaroja täynnä olevan pako-  
matkan jälkeen veljet pääsevät leiripaikkaansa, missä välittömästi aloitetaan  
saaliin jakaminen. Joukon johtaja, veli Raivo Raitis, suorittaa jakamisen.  
Hänen laskutoimituksensa on seuraava:

$$\frac{12}{3} = \frac{9+3}{3} = \frac{9+\cancel{3}}{\cancel{3}_1} = \frac{9+1}{1} = \frac{10}{1} = 10.$$

Veli Heimo Höynäs pitää hatusta tempaistuna veli Raitiksen tapaa osittaa  
jaettava ja toteaa, että ensin on jaettava täydet kymmenet ja sen jälkeen  
niiden yli menevä osa. Hän laatii seuraavan laskelman:

$$\frac{12}{3} = \frac{10+2}{2+1} = \frac{\cancel{10}+2}{\cancel{2}_1+1} = \frac{5+2}{1+1} = \frac{5+2}{2} = \frac{5+\cancel{2}}{\cancel{2}_1} = \frac{5+1}{1} = \frac{6}{1} = 6.$$

Veli Hesse Hurskas pitää kumpaakin esitettyä laskutapaa virheellisenä ja sa-  
noo, että jakamisessa on sovellettava murtolukujen yhteenlaskusääntöä taka-  
perin. Hän esittää laskelman

$$\frac{12}{3} = \frac{12}{1+1+1} = \frac{12}{1} + \frac{12}{1} + \frac{12}{1} = 12 + 12 + 12 = 36,$$

mikä haltioituneen innostuksen vallassa heti ymmärretään ihmeteoksi, sillä  
nyt 12 munan saaliista siunaantuu jokaiselle 36 munaa!

Raitiksen ja Höynäksen miettiessä mistä veli Hurskakselle saataisiin myös leipiä ja kaloja jaettaviksi, paikalle saapuu kuriiritehtävissä toimiva veli Raimo Sailas, joka nälkäisenä haluaa osan saaliista. Sailas järjestää munat hiekalle jonoon ja jakaa ne veljien tikareilla neljään yhtäsuureen joukkoon (tähdellä leimattuja neuvostomunia),

$$\ast \ast \ast \dagger \ast \ast \ast \dagger \ast \ast \ast \dagger \ast \ast \ast$$

mutta hänet ammutaan välittömästi komsomolin kätyrinä.

Mitäkö tekemistä esimerkillämme on korkeamman matematiikan kanssa?

Se, että jakolasku, ainakin meidän galaksissamme, on aina sama riippumatta siitä ovatko jaettava ja jakaja lukuja tai polynomeja tai muita otuksia. Jakolaskun kantavia periaatteita on, että *koko jaettava jaetaan* ja että *jako suoritetaan koko jakajalla* ja että *nollalla ei saa jakaa*. Esimerkiksi rationaalifunktiota derivoitaessa menee koko toimitus ketuille, jos ennen derivointia tai sen jälkeen tekee jotakin seuraavan kaltaista:

$$\frac{x^2 + x + 2}{x + 2} = \frac{x^2 + \cancel{x} + \cancel{2}}{\cancel{1} + \cancel{1}} = \frac{x^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{x^2 + 2}{2} = \frac{x^2 + \cancel{2}}{\cancel{2}} = x^2 + 1.$$

**Esim 2.** Määritä funktion  $f$ :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

derivaatan nollakohdat. [K85]

**Ratk:** Rationaalifunktio on supistetussa muodossa (perustele!), joten voimme oikopäätä ryhtyä derivoimaan. Osamäärän derivoimissääntöä soveltaen saamme aluksi

$$f'(x) = \frac{(x^2 + x + 1)'(x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}.$$

Sievennä derivaatan lauseketta, kunnes saat sen muotoon

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Nyt voimme ratkaista derivaatan nollakohdat. Osamäärä eli jakolaskun tulos on nolla, jos ei ole mitään jaettavaa eli jos jaettava on nolla, eli, jos jakolasku on merkitty rationaalilausekkeeksi, niin sen lausekkeen *osoittaja on nolla*. Saamme yhtälön  $x^2 - 1 = 0$ , josta  $x = \pm 1$ .