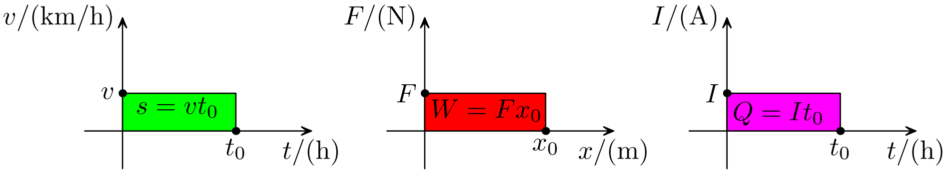
Integraalilaskentaa

Tämä on lukion oppimateriaaleista hieman poikkeava yksinkertaistettu selvitys määrätyn integraalin laskemisesta. Kerromme miksi integroidaan, mitä integroiminen tarkoittaa, miten integraali lasketaan ja miten integraalilaskentaa sovelletaan. Rajoitamme tarkastelun jatkuviin funktioihin. Lähtötiedoksi riittää, että tuntee integraalifunktion käsitteen: välillä $]a, b[$ määritelty funktio G on jatkuvan funktion g integraalifunktio, jos $G'(x) = g(x)$ kaikilla $x \in]a, b[$. Jos G_1 ja G_2 ovat g:n integraalifunktiota, niin $G_1 - G_2$ on vakio.

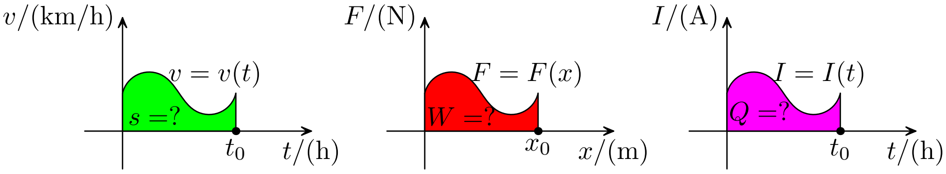
1. Mihin integraalilaskentaa tarvitaan?

Lukemattomat käytännön ongelmat johtavat integraalilaskentaan. Esittelemme tässä ainoastaan kolme fysiikan esimerkkiä.

Jos kappale liikkuu vakionopeudella v, niin sen aikavälillä $[0, t_0]$ kulkema matka on $s = vt_0$. Jos kappaleen kulkusuuntaan vaikuttava vakiovoima F siirtää kappaletta matkan x_0, niin voiman suorittama työ on $W = Fx_0$. Jos johtimen läpi kulkee vakiovirta I, niin aikavälillä $[0, t_0]$ johtimen läpi kulkeva sähkömäärä on $Q = It_0$. Nämä suureet voidaan havainnollistaa (t, v)-, (x, F)- ja (t, I)-koordinaatistoissa suorakulmioiden pinta-aloina.



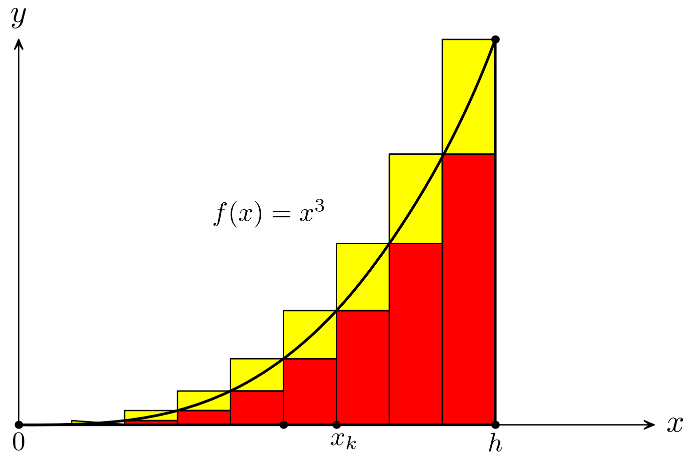
Jos nopeus, voima ja virran voimakkuus vaihtelevat, niin eräät koordinaatiston pinta-alat tai niiden vastaluvut esittävät tuolloinkin matkaa, työtä ja sähkömäärää, mutta emme voi käyttää perinteisiä geometrisia menetelmiä niiden laskemiseen. Ongelmana on tällöin alueen pinta-alan tai sen vastalu-



vun laskeminen, kun vähintään yhtä alueen reunaviivoista esittää tunnettu funktio, tässä tapauksessa $v = v(t)$, $F = F(x)$ ja $I = I(t)$. Se kannattaa ratkaista yleisesti tutkimalla funktiota $y = f(x)$ x-akselin välillä $[a, b]$. Osoittautuu, että sen kuvaajan ja x-akselin rajoittama pinta-ala tai sen vastaluku voidaan laskea eräiden funktion kuvaajaan liittyvien summien yhteisenä raja-arvona.

2. Integraalin määritelmä

Johdattavaksi esimerkiksi laskemme funktion $f(x) = x^3$ kuvaajan ja x-akselin välillä $[0, h]$ rajoittaman kuvion alan approksimoimalla sen kuvan osoittamalla tavalla suorakulmioilla. Kysytty ala A on suurempi kuin kuvassa olevien



punaisten palkkien alojen summa ja pienempi kuin punaisten ja keltaisten palkkien alojen summa. Palkit on saatu aikaan jakamalla väli $[0, h]$ n:ään yhtäsuureen osaan. Jakopisteet ovat

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = h,$$

eli $x_k = kh/n$, missä $k \in \{0, 1, 2, \ldots n\}$. Jakovälin pituus on $\Delta x = h/n$. Koska funktio f on aidosti kasvava, ovat $f(x_{k-1})$ ja $f(x_k)$ sen pienin ja suurin arvo jakovälillä $[x_{k-1}, x_k]$. Punaisten palkkien alojen summa on siten

$$s_n = \frac{h}{n}\big(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\big) = \frac{h^4}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1} k^3,$$

ja punaisten sekä keltaisten palkkien alojen summa vastaavasti

$$S_n = \frac{h}{n}\big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\big) = \frac{h^4}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Induktiolla todistuvan kaavan

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \;=\; \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

avulla summat sievenevät muotoon

$$s_n = \frac{h^4}{4}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^2 \quad \text{ja} \quad S_n = \frac{h^4}{4}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^2.$$

Koska $s_n < A < S_n$ kaikilla n:n arvoilla, on

$$A = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \tfrac{1}{4}h^4.$$

Tämän esimerkin jälkeen on helppo oivaltaa, että sama ajatus voidaan toteuttaa ainakin jatkuville funktioille. Oletetaan siis, että funktio f on jatkuva välillä $I = [a, b]$. Jaetaan I osaväleihin jakopisteillä

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Voimme yksinkertaisuuden vuoksi olettaa, että jokaisen osavälin pituus on $\Delta x = (b - a)/n$. Olkoot M_k ja m_k f:n suurin ja pienin arvo välillä $\Delta I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ja $\xi_k \in \Delta I_k$. Osaväleillä ΔI_k on voimassa kaksoisepäyhtälöt

$$m_k\,\Delta x \le f(\xi_k)\,\Delta x \le M_k\,\Delta x,$$

ja kun ne lasketaan yhteen, saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x \le \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x\,.$$

Kaksoisepäyhtälön laidoilla olevia summia kutsutaan funktion f *ala-* ja *yläsummiksi* ja keskellä olevaa summaa funktion f *Riemannin*[1] *summaksi.* Voidaan todistaa, mutta se ei ole koulumatematiikkaa, että kaikilla kolmella kaksoisepäyhtälössä olevalla summalla on yhteinen raja-arvo, kun $n \to \infty$. Tätä raja-arvoa kutsutaan funktion f määrätyksi integraaliksi yli välin $[a, b]$. Jos $f(x) \ge 0$, niin integraalin arvo on se pinta-ala, jonka käyrä $y = f(x)$ rajoittaa x-akselin kanssa välillä $[a, b]$. Funktion f määrätty integraali yli välin $[a, b]$ merkitään $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, ja se on siis summan raja-arvo:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x\,.$$

[1] Bernhard Riemann (1826 – 1866), saksalainen matemaatikko.

3. Miten integraali lasketaan?

Seuraavat määrätyn integraalin ominaisuudet seuraavat suoraan integraalin määritelmästä.

1. Jos c on vakio, niin $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$.

2. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

3. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Jos k on vakio, niin $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

5. Jos $f(x) \geq 0$ välillä $[a,b]$, niin $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

6. Jos $f(x) \geq g(x)$ välillä $[a,b]$, niin $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

7. Jos m ja M ovat f:n pienin ja suurin arvo välillä $[a,b]$, niin

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)\ .$$

8. Integraalin määritelmään sisältyy implisiittisesti integroinnin suunta: lähtökohta oli, että $a < b$ ja integraalin määrittelevässä summassa oli $\Delta x = x_k - x_{k-1} > 0$. Voimme vastaavasti määritellä integraalin vastakkaiseen suuntaan b:stä a:han asettamalla

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,(x_{k-1}-x_k)\ .$$

Selvästi on voimassa $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

9. Kaikilla $c \in \mathbb{R}$ (edellyttäen, että f on riittävän laajalla välillä määritelty ja jatkuva) on voimassa

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Ominaisuuksia 1 – 9 soveltaen saadaan yksinkertainen tapa integraalin laskemiseksi. Määrittelemme f:n *kertymäfunktion* K yhtälöllä

$$K(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{jolloin} \quad K(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Selvästi $K(a) = 0$ ja K:n erotusosamäärä kohdasta x kohtaan $x + h$ on

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x+h) - k(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}x - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}x.$$

Olkoot m_h ja M_h funktion f pienin ja suurin arvo välillä $[x, x+h]$ (tai $[x+h, x]$, jos $h < 0$). Tällöin on

$$m_h \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t \le M_h\ .$$

Kun $h \to 0$, luvut m_h ja M_h lähestyvät lukua $f(x)$, joten kertymäfunktion erotusosamäärän raja-arvo on $f(x)$. Kertymäfunktio on siis eräs f:n integraalifunktioista: $K(x) = F(x) + C$. Koska $K(a) = 0$, on $C = -F(a)$ ja

$$K(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)\,.$$

Integraali a:sta b:hen on siis

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big/_a^b F(x) = F(b) - F(a).$$

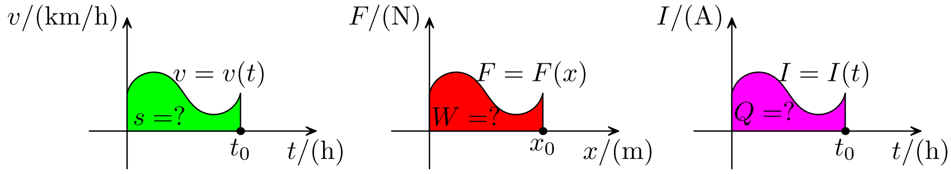
Keskellä oleva laskutekninen osa luetaan "*sijoitus a:sta b:hen*".

Esim. Käyrän $y = x^3$ ja x-akselin välillä $[0, h]$ rajoittaman kuvion ala on

$$A = \int_0^h x^3\,\mathrm{d}x = \Big/_0^h \tfrac{1}{4}x^4 = \tfrac{1}{4}\,h^4\,.$$

4. Miten integraalilaskentaa sovelletaan?

Sanotun perusteella on selvää, että alussa asetetun ongelman

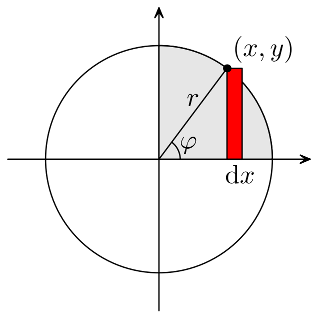


ratkaisut ovat

$$s = \int_0^{t_0} v(t)\,\mathrm{d}t, \qquad W = \int_0^{x_0} F(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad Q = \int_0^{t_0} I(t)\,\mathrm{d}t.$$

Integrointiongelmia ratkaistaan käytännössä soveltamalla perinteisen geometrian menetelmiä pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskemismenetelmiä ”äärettömän pieniin” kuvioihin ja kappaleisiin. Tällöin sovelletaan ajatusta integraalista tiettyjen summien raja-arvona. Tämä havainnollinen menetelmä on matemaattisesti epätäsmällinen mutta kuitenkin oikeita tuloksia antavana.

Esim. Olkoon (x, y) origokeskeisen r-säteisen ympyrän ensimmäisessä neljänneksessä oleva kehäpiste.



Asetamme kohtaan x *pinta-alkion*, eli äärettömän ohuen suorakulmion, jonka korkeus on y ja kanta on $\mathrm{d}x$. Suorakulmion ala on $\mathrm{d}A = y\mathrm{d}x$, ja neljäsosa ympyrän alasta saadaan summaamalla kaikki välillä $[0, r]$ olevat pinta-alkiot. Siis

$$A_{\odot} = 4\int_0^r \mathrm{d}A = 4\int_0^r y\,\mathrm{d}x.$$

Kuvan mukaan $y = y(\varphi) = r\sin\varphi$ ja $x = x(\varphi) = r\cos\varphi$, joten

$$x'(\varphi) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = -r\sin\varphi \quad \text{ja} \quad \mathrm{d}x = -r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Pinta-alkio voidaan nyt kirjoittaa muotoon

$$\mathrm{d}A = y\mathrm{d}x = r\sin\varphi(-r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi = -r^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

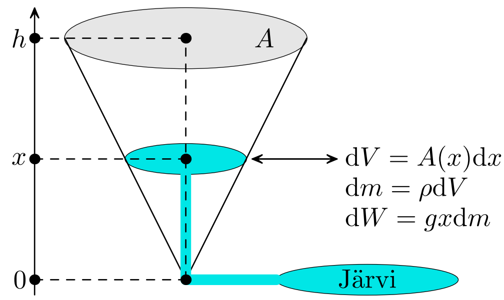
Muuttujan x rajoja 0 ja r vastaavat φ:n arvot ovat $\pi/2$ ja 0, ja ympyrän ala on

$$A_\odot = 4\int_0^r \mathrm{d}A = 4\int_{\pi/2}^0 -r^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 4r^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \pi r^2.$$

Myös integrointeihin johtavia fysiikan ongelmia voidaan tarkastella havainnollisesti.

Esim. Kuinka suuri työ tehdään, kun järven rannalla vesirajassa kärjellään seisova kartion muotoinen säiliö täytetään vedellä? Kartion korkeus on h, kartioon mahtuvan veden massa on m ja putoamiskiihtyvyys on g.

Olkoon A kartion pohjan ala ja $A(x)$ korkeudella x olevan kartion akselia vastaan kohtisuoran leikkauskuvion ala. Kun vesimassa-alkio dm nostetaan



korkeudelle x, tehdään työ $\mathrm{d}W = gx\mathrm{d}m$. Massa-alkio on muodoltaan lieriö, jonka pohjan ala ja korkeus ovat $A(x)$ ja dx. Lieriön tilavuus on $\mathrm{d}V = A(x)\mathrm{d}x$, joten $\mathrm{d}m = \rho\mathrm{d}V$, missä ρ on veden tiheys. Yhdenmuotoisista kartioista saadaan

$$\frac{A(x)}{A} = \left(\frac{x}{h}\right)^2, \quad \text{ja edelleen} \quad A(x) = \frac{A}{h^2}x^2.$$

Työalkio on siis

$$\mathrm{d}W = gx\mathrm{d}m = \ldots = \frac{3mg}{h^3}x^3\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad W = \int_0^h \mathrm{d}W = \ldots = \frac{3}{4}mgh.$$

5. Lopuksi

Integraalin määritelmää voi yleistää luopumalla funktion jatkuvuusoletuksesta ja jakamalla integroimisväli osavälejä monimutkaisemmiksi joukoiksi. Myös se reaalilukujoukko, jonka yli integraali lasketaan, voi olla väliä yleisempi $\mathbb{R}$:n osajoukko. Näitä yleistyksiä pohditaan lukion jälkeen yliopistomatematiikassa.

Harjoitustehtäviä

1. Vesirajassa oleva r-säteisen puolipallon muotoinen pata täytetään vedellä. Pataan mahtuvan veden massa on m. Kuinka suuri työ tehdään?

2. Muovista valmistetun pallon massa on jakautunut siten, että pallon sisällä massan tiheys on suoraan verrannollinen etäisyyteen pallon keskipisteestä. Samasta materiaalista valmistetaan samalla periaatteella massaltaan kaksinkertainen pallo. Kuinka monta prosenttia sen säde on suurempi kuin ensin mainitun pallon säde?

3. Koordinaattiakselien sekä funktion

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

kuvaajan välillä $]0, \pi]$ rajoittama kuvio pyörähtää y-akselin ympäri. Laske syntyvän kappaleen tilavuus.

4. Kaukaisessa galaksien välisessä avaruudessa sijaitsevan pölypilven keskipisteessä tiheys on ρ ja keskipisteestä etäännyttäessä tiheys vähenee eksponentiaalisesti siten, että etäisyydellä r keskipisteestä tiheys on $\rho/2$. Laske pölypilven massa.

Vastaukset:

1. $5mgr/8$.
2. Noin 19%.
3. 4π.
4. Noin $75\rho r^3$.