$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

1. Osoita, että jos r on otsikon yhtälön juuri, niin myös $r^2 - 2$ on yhtälön juuri.

2. Osoita, että yhtälöllä on kolme reaalista juurta ja laske niiden kuusidesimaaliset likiarvot Newtonin menetelmällä.

3. Sijoita yhtälöön $x = u + v$ ja sievennä se muotoon

$$(u^3 + v^3 + 1) + 3(u + v)(uv - 1) = 0.$$

Tämä yhtälö toteutuu, jos luvut u ja v voidaan määrätä siten, että luvut u^3 ja v^3 toteuttavat yhtälöparin

$$\begin{cases} u^3 + v^3 & = -1 \\ u^3\, v^3 & = 1. \end{cases}$$

Muodosta toisen asteen yhtälö, alkuperäisen yhtälön *resolventtiyhtälö*, jonka juurina ovat luvut u^3 ja v^3, ja ratkaise se.

4. Kirjoita resolventtiyhtälön juuret z_1 ja z_2 muotoon

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos\omega + i \sin\omega \\ z_2 &= \cos\omega - i \sin\omega. \end{aligned}$$

Laske luvuista z_1 ja z_2 Eulerin kaavoja soveltaen yksi alkuperäisen yhtälön juurista $x = u + v$ sekä muut juuret ykköskohdassa todistetun ominaisuuden avulla. Vertaa juurten tarkkoja arvoja Newtonin menetelmällä laskettuihin likiarvoihin.